

# KENTSEL SU İHTİYACININ KARŞILANMASINDA ÇOKLU HAZNE PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNE NÜMERİK BİR YAKLAŞIM

*Yard. Doç. Dr. Mehmet Ardiçlioğlu*

Erciyes Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü 38039 Kayseri

Tel: 352 4374901/32326, Fax: 4375784, e-posta: [mardic@erciyes.edu.tr](mailto:mardic@erciyes.edu.tr)

*Prof. Dr. Tefaruk Haktanır*

Erciyes Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü 38039 Kayseri

Tel: 352 4374901/32325, Fax: 4375784, e-posta: [thaktan@erciyes.edu.tr](mailto:thaktan@erciyes.edu.tr)

## ÖZET

Su kaynakları ve su ihtiyacının yer ve zaman içinde farklılık göstermesi, su kaynaklarının etkin kullanımını zor bir problem haline getirmektedir [1]. Artan nüfus ile birlikte yerleşim bölgelerinde su ihtiyaçları da artmakta ve bu ihtiyacın karşılanmasında tek bir kaynak yeterli olmamaktadır. Yerleşim bölgelerinin su ihtiyaçlarının karşılanmasında farklı kaynaklardan beslenen çoklu boru ve haznelere oluşan sistemlerin kullanımı yaygındır. Bu sistemlerin hidrolik olarak çözümü oldukça karmaşık bir problem olup, çoğu kez deneme yanılma yöntemlerini gerektirir.

Bu çalışmada, çoklu hazne ve boru sistemlerinde meydana gelen akımın belirlenmesi için deneme-yanılma yöntemi gerektirmeyen nümerik bir yaklaşım ve bunu uygulayan Fortran dilinde bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. N adet hazne ve bunlar arasında akımın yer aldığı N adet borudan oluşan çoklu boru sisteminde borulardaki akımın hızı, yönü ve birleşim noktasındaki enerji yüksekliği bilinmemektedir. Problem, rezervuar serbest su yüzü kotları ile boru birleşim noktası arasında, boru sürtünme kayıplarını ve olası yerel kayıpları da hesaba katan N adet Bernoulli denklemi ve birleşim noktasındaki süreklilik denklemi ile birlikte toplam N+1 adet lineer olmayan bir denklem takımı olarak modellenmekte ve bu takımın çözümü, başlangıç tahminlerini kendiliğinden yapan, bir Newton-Raphson iteratif yöntemiyle elde edilmektedir. Program, vana, dirsek, hazne giriş ve çıkış kayıplarını da göz önüne almakta olup, sürtünme kayıpları için Darcy-Weisbach formülünü kullanmakta, bu formüldeki sürtünme katsayısını da, bağıl pürüzlülüğün ve Reynold Sayısının fonksiyonu olarak Colebrook-White ifadesinden lineer iterasyon yöntemiyle elde etmektedir.

## BORULARDA AKIM

İçme, kullanma ve endüstriyel amaçlı suların iletimi günümüzde önemli mühendislik problemleri arasındadır. Borulardaki akımlarda oluşan enerji kayıplarının belirlenmesi boru hatlarının tasarımında gereklidir. Bu kayıplar sürtünme kayıpları ve yerel kayıplar olmak üzere iki farklı başlıkta incelenir.

### Yerel Kayıplar

Boru hattı üzerinde akımı rahatsız edebilecek her çeşit yerel değişim bir miktar enerjinin kaybolmasına neden olur. Örneğin: boru bileşimleri, düğüm noktaları, çap değiştiren parçalar, dirsekler ve tam açık olduklarında dahi vanalar birer yerel enerji kayıp kaynağıdır. Yerel kayıplar genellikle borudaki hız yüksekliğinin bir kayıp katsayısı ile çarpımı şeklinde aşağıdaki ifade yardımı ile hesaplanır.

$$h_y = K \frac{V^2}{2g} \quad (1)$$

Hazne çıkışlarında  $K=0.5$ , girişinde ise genellikle  $K=1$  olarak alınır. Boru dirseklerinde ise yerel kayıplar eğrilik yarıçapına ve boru çapına bağlı olarak değişir. Vana ve T parçaları için  $K$  katsayıları üretici firma tarafından verilmelidir.

### Sürtünme Kayıpları

Borularda sürtünmeden dolayı meydana gelen yük kayıplarını belirlemede yaygın olarak Darcy-Weisbach ifadesi kullanılmaktadır. Bu ifade

$$h_s = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (2)$$

şeklinde olup burada  $L$ : boru boyu,  $D$ : boru çapı,  $V$ : borudaki akımın ortalama hızı,  $g$ : yerçekimi ivmesidir ve sürtünme katsayısı  $\lambda$  rölatif boru pürüzlülüğüne ve Reynolds sayısına bağlı olarak belirlenir. Sürtünme katsayısı ( $\lambda$ ) Moody diyagramı ile belirlenebileceği gibi, Colebrook-White formülü yardımı ile oldukça iyi sonuçlar elde edilmektedir ve bu ifade aşağıdaki (3) ifadesinde olduğu gibi verilmiştir [2].

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{k/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right) \quad (3)$$

Bu ifade de  $k$ : nominal boru iç cidar pürüzlülük yüksekliği olup,  $(k/D)$  rölatif pürüzlülük olarak adlandırılır ve (3) ifadesinde  $\lambda$ 'nın belirlenmesi deneme yanılmayı gerektirir. Bu çalışmada Colebrook-White formülünün  $\lambda$  için çözümünde lineer iterasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu amaçla (3) ifadesi aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\lambda = \left[ -1.15 / \ln \left( \frac{k/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right) \right]^2 \quad (4)$$

Genel olarak, lineer iterasyon yönteminde ardışık iterasyonlar için:

$$x_i - x_{i-1} = (x_{i-1} - x_{i-2}) g'(x) \quad (5)$$

ifadesi geçerlidir. İterasyonların yakınsaması için:  $|x_i - x_{i-1}|$  ifadesinin  $|x_{i-1} - x_{i-2}|$  ifadesinden küçük olması gerekir. Bunun için de, (5) ifadesinden görülebileceği gibi,  $|g'(x)|$  terimi 1 den küçük olmak zorundadır.  $|g'(x)|$  sıfıra ne kadar yakın olursa, lineer iterasyon algoritması o derece daha hızlı yakınsayacaktır. Colebrook-White formülü için  $g'(x)$  ifadesi:

$$g'(x) = \left[ (1.3255) \cdot (2.51 / \text{Re}) \cdot \lambda^{-1.5} \right] / \left\{ \ln \left[ e / 3.7 + (2.51 / \text{Re}) \cdot \lambda^{-0.5} \right] \right\}^3 \cdot \left[ e / 3.7 + (2.51 / \text{Re}) \cdot \lambda^{-0.5} \right] \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir ve bu ifade (k/D) ve Re'nin her kombinasyonunda,  $\lambda$ 'nın alabileceği değerler aralığı olan:  $0.002 < \lambda < 0.1$  aralığında daima sifira çok yakın bir boyut kazanmaktadır. Kısaca, (6) ifadesindeki  $|g'(x)|$  in sayısal değeri her zaman 0.1 den küçüktür. Bu nedenle (4) nolu ifade  $\lambda$  için her zaman lineer iterasyon yöntemiyle oldukça hızlı bir şekilde yakınsayacaktır. Genellikle  $\lambda$ ,  $0.01 < \lambda < 0.03$  aralığında olup başlangıç değeri olarak  $\lambda=0.02$  alınarak (4) nolu ifadede eşitliğin sağ tarafına konur ise,  $\lambda_2 = g(\lambda_1)$  iterasyonları birkaç adımda gerçek  $\lambda$ 'yı vermektedir.

## ÇOKLU HAZNE ve BORU SİSTEMLERİ

Çoklu hazne ve boru sistemlerine örnek olarak Şekil 1 gösterilebilir. Burada n adet hazne borular ile bağlanmış olup birinci hazne en yüksek ve n'inci hazne en düşük kottadır. Bu hazneler arasındaki borular J noktasında birleşmektedir. Birinci borudaki akım yönü J noktasına doğru ve n'inci borudaki akımın yönü n'inci hazneye doğrudur. Diğer borulardaki akımın yönü bilinmemektedir. Ayrıca, birleşim noktasındaki enerji yüksekliği de belli değildir. Hazne serbest su yüzü kotları ile boru birleşim noktası arasında n adet Bernoulli denklemi ve bir adet süreklilik denklemi yazılabilir. Su veren hazne ve boru birleşim noktası arası ve birleşim noktası ile suyun aktığı hazne arasındaki enerji denklemleri sırasıyla:

$$\frac{V_i^2}{2g} \left( C_{ei} + \sum C_{li} - \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \right) + H - Z_i = 0 \quad (7)$$

$$\frac{V_i^2}{2g} \left( \sum C_{li} - \lambda_i \frac{L_i}{D_i} + 1 \right) - H + Z_i = 0 \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $Z_i$ : i'ninci haznenin su yüzü kotu (m),  $C_{ei}$ : i'ninci haznedeki çıkış kaybı,  $\sum C_{li}$  i. : boru üzerindeki dirsek ve vanalarda oluşan kayıpların toplamını,  $\lambda_i$ : borudaki sürtünme katsayısı (Darcy-Weisbach ifadesindeki),  $L_i$ : boru boyu (m),  $D_i$ : boru çapı (m),  $V_i$ : borudaki ortalama akım hızı (m/s), H: J noktasındaki enerji yüksekliği (m) ve g: yerçekimi ivmesidir (m/s<sup>2</sup>). Birinci hazne için sadece (7) nolu ifade, sonuncu hazne için sadece (8) ifadesi geçerli olup aradaki tüm hazneler için her iki eşitlik yazılabilir. Birleşim noktasındaki süreklilik denklemi ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q_1 + \sum_{i=2}^{n-1} c_i Q_i - Q_n = 0 \quad (9)$$

Bu ifadede  $Q_i$ : i'ninci boruya gelen akımın debisi (m<sup>3</sup>/s) ve  $c_i$ : boşalan hazneler için +1, dolan hazneler için -1 değerini alan, debi katsayısıdır.

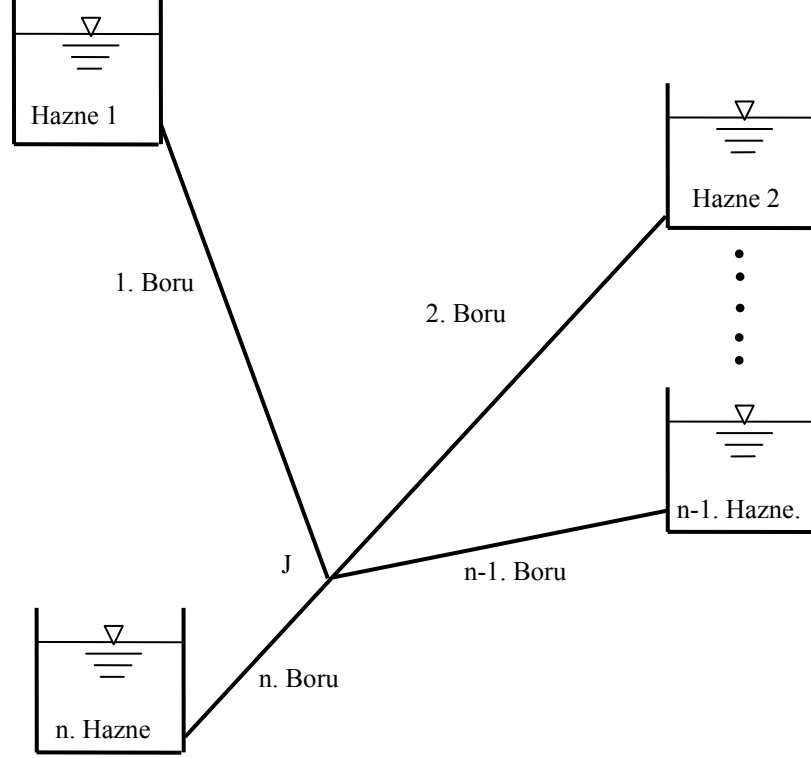
Tüm boruların dairesel kesitli olması durumunda (9) nolu ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V_1 D_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} c_i V_i D_i^2 - V_n D_n^2 = 0 \quad (10)$$

Hazne su yüzü kotu, boru birleşim noktası j nin enerji kotu H dan yüksek ise haznedeki boşalım, aksi durumda ise hazneye doğru akım oluşacaktır. Eğer j-1 indisi en düşük kotlu boşalım olan hazne, j indisi ise suyun geldiği n. hazne ise aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$Z_j < H < Z_{j-1} \quad (11)$$

(7) ve (8) nolu eşitliklerde sol taraf sırasıyla  $t$  ve  $u$  ile gösterilerek çoklu boru probleminde  $n+1$  adet lineer olmayan denklem aşağıdaki gibi yazılabilir. Enerji denklemleri ve  $J$  noktasındaki süreklilik denklemi, aşağıda özetlendiği gibi toplam  $n+1$  adet lineer olmayan denklem oluşturur.



Şekil 1. Çoklu hazne sistemi

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 0 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 t_{j-1} &= 0 \\
 u_j &= 0 \\
 u_{j+1} &= 0 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 u_n &= 0 \\
 D_1^2 V_1 + \dots + D_{j-1}^2 V_{j-1} - D_j^2 V_j - \dots - D_n^2 V_n
 \end{aligned} \quad (12)$$

Dolan ve boşalan haznelerin belirlenmesi amacıyla ilk olarak  $j=2$  kabul edilerek  $n-2$  nolu alttaki haznenin dolduğu ve böylece su veren hazneye ait borudaki hız aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$V_i = \left[ 2g \cdot (Z_i - H) / \left( C_{ei} + \sum C_{li} + \lambda_i \cdot L_i / D_i \right) \right]^{0.5} \quad (13)$$

Dolan hazneye su veren borudaki hız ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V_i = \left[ 2g \cdot (H - Z_i) / \left( \sum C_{l_i} + \lambda_i \cdot L_i / D_i + 1 \right) \right]^{0.5} \quad (14)$$

(11) ve (12) nolu ifadelerde H j'ninci haznenin su yüzü kotuna eşittir ve borulardan geçen akımın debisi hız ve kesit alanının çarpımıyla hesaplanır. (9) nolu eşitliğin sol tarafı pozitif ise yüksek olan j-1 nolu hazneden boşalım olmakta, j'ninci hazne ve altındaki hazne dolmaktadır. Tersine (9) nolu ifadeye sol taraf negatif ise boşalan akım miktarı dolan akım miktarından küçük olacak böylece gerçek H, j'ninci haznenin su yüzü kotundan düşük olacaktır. Azalan H değeri ile bazı boşalan borular su verir hale gelecek, böylece boşalan borudaki akım artacak ve toplam akan debi boşalan debiye eşit olacaktır. Bu nedenle j bir artarak enerji yüksekliği H, alt ara haznedeki su yüksekliğine eşit olacaktır. Borulardaki hızlar yeni H ile (13) ve (14) nolu eşitlikler yardımı ile hesaplanarak (9) ifadesi yeni den belirlenecektir. Bu döngü (9) nolu eşitliğin değeri negatif oluncaya kadar devam edecektir.

### Non-Linear Denklem Takımının Çözümü

(12) nolu ifade ile verilen non-lineer denklem takımının çözümü için Newton-Rapson yöntemi kullanılmış, bunun için öncelikle düğüm noktasının gerçek enerji yüksekliği, H, belirlenmiştir. (12) nolu takımın iteratif çözümünün her adımında gerekli Jacobian katsayılar matrisi ile oluşan lineer denklem takımı aşağıdaki gibi teşkil edilir, ve her iterasyon adımıdaki  $\Delta V_i$  ve  $\Delta H$  artışları bu lineer denklem takımının bilinmeyen vektörü olarak hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} t'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & +1 \\ 0 & t'_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t'_{j-1,j-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u'_{jj} & \dots & 0 & 0 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & u'_{nn} & -1 \\ D_1^2 & D_2^2 & \dots & D_{j-1}^2 & -D_j^2 & -D_{j+1}^2 & \dots & -D_n^2 & 0 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta V_{j-1} \\ \Delta V_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta V_n \\ \Delta H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_1 \\ -t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -t_{j-1} \\ -u_j \\ \cdot \\ \cdot \\ -u_n \\ -s_{n+1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Burada;

$s_{n+1}$  : (10) nolu ifadenin sol tarafının değeri olup  $V_i$ 'nin en son değeri ile hesaplanır.

$t'_{ii}$  :  $V_i$  nin  $t_i$  ye göre kısmi türevi ve

$u'_{jj}$  :  $V_j$  nin  $u_j$  ye göre kısmi türevidir.

Daha sonra bilinmeyenler aşağıdaki ifadeler ile hesaplanır.

$$V_{i_2} = V_{i_1} + \Delta V_i \quad (16a)$$

$$H_2 = H_1 + \Delta H \quad (16b)$$

j indisi ile gösterilen ve (13) ve (14) ifadeleri ile hesaplanan hız,  $V_{i0}$ , gerçekte su veren boruda biraz küçük, su alan boruda da biraz büyük olacaktır. Bu nedenle başlangıç hız tahminleri su veren ve alan borularda sırasıyla aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$V_{i1} = 0.8V_{i0} \quad (17)$$

$$V_{i1} = 1.2V_{i0} \quad (18)$$

j'ninci hazneye bağlı borudaki hız için başlangıç değeri 1.0 m/s alınmış ve n+1 adet bilinmeyen için H aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$H_1 = Z_j + 0.2(Z_{j-1} - Z_j) \quad (19)$$

$V_1, V_2, \dots, V_n, H$ 'ın  $t_i$  veya  $u_i$  ye göre kısmi türevleri i'ninci bağımsız değişken dışında sıfırdır.  $V_i$  nin  $t_i$  ve  $u_i$  ye göre kısmi türevleri ise aşağıda verilmiştir.

$$t'_{ii} = V_i \cdot (C_{ei} + \sum C_{li} + \lambda_i \cdot L_i / D_i) / g \quad (20)$$

$$u'_{ii} = V_i \cdot (\sum C_{li} + \lambda_i \cdot L_i / D_i + 1) / g \quad (21)$$

Sisteme ait n adet hız ve H başlangıç değerleri belirlendikten ve (15) nolu ifadedeki  $\Delta V_i$  ve  $\Delta H$  artışları çözüldükten sonra n+1 adet rölatif fark aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$RD_i = \left| \Delta V_i / V_{i2} \right|, \quad i = 1, \dots, n \text{ için, ve}$$

$$RD_{n+1} = \left| \Delta H / H_2 \right|$$

Tüm rölatif farklar,  $RD_i$ 'ler,  $10^{-6}$ 'dan küçük olana kadar yukarıda özetlenen döngü tekrarlanır ve sonunda çözüm vektörü elde edilmiş olur. Aksi takdirde,  $RD_i$ 'ler henüz yeteri kadar küçük değilken,  $V_{i1} = V_{i2}$ ,  $H_1 = H_2$  atamaları yapılarak sisteme ait lineer denklem takımı bu yeni değerleri ile çözülür. İterasyonlar, 6 anlamlı hane hassasiyetinde  $V_{i2} \approx V_{i1}$  ve  $H_2 \approx H_1$  oluncaya kadar devam eder. Böylece, (12) nolu non-lineer denklem takımının iteratif çözümü elde edilmiş olur.

### Örnek Problem ve Çözümü

Yukarıda özetlendiği gibi, çoklu haznelere birbirine bağlayan borulardaki akımların hesaplanmasını borulardaki sürtünme ve yerel kayıpların da göz önüne alındığı nümerik model, Fortran dilinde bir program olarak kodlanmıştır [3]. Geliştirilen program ile birçok problem çözülmüştür. Bunlardan biri de, Streeter ve Wylie'nin "Fluid Mechanics (Ninth Edition)" kitabının 556'ncı sayfasında verilen örnek problemdir [4]. Programda girdi dosyası olarak aşağıdaki Data dosyası verildiğinde:

#### Data Dosyası:

Example problem about nine branching pipes made up as an example problem for the purpose of demonstration

3 This number indicates the total number of branching pipes

30. 18. 9. Reservoirs Water surface elevations (m)

3000. 10. 0.20 L1, D1, e1 [length(m), diameter(cm), roughness(mm) of pipe 1]

600. 45. 0.90 L2, D2, e2

1000. 60. 0.60 L3, D3, e3

0.0 0.0 Entrance loss coefficients of exit from reservoirs into the pipes

0.0 0.0 0.0 Total minor loss coefficients in the pipes

1.e-6 kinematic viscosity of water (m/s)

Sonuç olarak aşağıda verilen çıktı dosyası elde edilmektedir.

Water surface elevations of the reservoirs:

Water surface elevations of reservoir no. 1 = 30.00 m

Water surface elevations of reservoir no. 2 = 18.00 m

Water surface elevations of reservoir no. 3 = 9.00 m

Length, diameter, and roughness height of the pipes:

$L(1) = 3000. \text{ m}$ ,  $D(1) = 100. \text{ cm}$ ,  $k(1) = 0.20 \text{ mm}$

$L(2) = 600. \text{ m}$ ,  $D(2) = 45. \text{ cm}$ ,  $k(2) = 0.90 \text{ mm}$

$L(3) = 1000. \text{ m}$ ,  $D(3) = 60. \text{ cm}$ ,  $k(3) = 0.60 \text{ mm}$

Entrance loss coefficients of exit from reservoirs into the pipes:

$Ck(1) = 0.00$ ,  $Ck(2) = 0.00$

Total minor loss coefficients in the pipes are:

$Cl(1) = 0.00$ ,  $Cl(2) = 0.00$ ,  $Cl(3) = 0.00$ ,

Kinematic viscosity of water,  $\nu = 1.00\text{E-}06 \text{ (m}^2\text{/s)}$

V's and Q's in the upper pipes assuming  $H = Z(2)$

$V0(1) = 2.31 \text{ m/s}$ ,  $Q0(1) = 1.816 \text{ m}^3\text{/s}$

$V0(2) = 0.00 \text{ m/s}$ ,  $Q0(2) = 0.000 \text{ m}^3\text{/s}$

V's and Q's in the lower pipes assuming  $H = Z(2)$

$V0(3) = 2.27 \text{ m/s}$ ,  $Q0(3) = 0.642 \text{ m}^3\text{/s}$

Summation of Q's in the upper pipes = 1.82

Summation of Q's in the lower pipes = 0.64

H actual is between water surface elevations of reservoirs: 1 & 2

$$18.00 < H < 30.00$$

Iterations for the system of 4 nonlinear eqtns:

$V_{i1}$	$V_{i2}$	$\lambda_i$
1.84952	1.63026	0.01418
1.00000	2.74922	0.02000
2.72515	2.98206	0.01986

$HJ_1$	$HJ_2$
20.40000	24.34336

...

1.50924	1.50924	0.01439
---------	---------	---------

2.05404	2.05404	0.02362
---------	---------	---------

3.03694	3.03694	0.01981
---------	---------	---------

24.98791	24.98791	
----------	----------	--

The solution is reached in 6 loops yielding the following result:

Hydraulic head at the junction point:  $H = 24.99 \text{ m}$

Flow rates incoming to the junction:

$$Q(1) = 1.1854 \text{ m}^3/\text{s}, \quad V(1) = 1.509 \text{ m/s}$$

Flow rates outgoing from the junction:

$$Q(2) = 0.3267 \text{ m}^3/\text{s}, \quad V(2) = 2.054 \text{ m/s}$$

$$Q(3) = 0.8587 \text{ m}^3/\text{s}, \quad V(3) = 3.037 \text{ m/s}$$

### **Kaynaklar**

[1] Burak, S., Duranyıldız İ., Yetiş Ü., 1997, Su kaynaklarının yönetimi, DPT Ulusal Çevre Eylem Planı.

[2] Brater FE, King HW. Handbook of hydraulics for the solution of hydraulic engineering problems, 6th ed. New York: McGraw-Hill; 1976.

[3] Haktanır T, Ardiçlıoğlu, M “Numerical Modeling of Moody Friction Factor and Branching Pipes Problem,” Advances in Engineering Software Journal, 35, 773-779, (2004),

[4] Streeter, V.L., Wylie, E.B. and Bedford, K.B (1998) Fluid Mechanics, Ninth Edition. McGraw-Hill.